

2. feladatsor

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$(A \iff B) = (A \implies B) \wedge (A \impliedby B) !$$

2. Matematika országban a bíró csak a bizonyítékoknak hisz. Például, ha F azt állítja, hogy van fekete oroszlán, akkor állításának helyességéről meggyőzheti a bírót azzal, ha mutat neki egy fekete oroszlánt.

a) F azt állítja, hogy minden oroszlán fekete. Elég bizonyíték-e, ha mutat a bírónak egy fekete oroszlánt?

b) F azt állítja, hogy minden oroszlán fekete, G pedig azt állítja, hogy F téved. Hogyan bizonyíthatná G az állítását?

c) F azt állítja, hogy minden 2-re végződő négyzetszám osztható 3-mal. G szerint F téved. Hogyan bizonyíthatná G az állítását? F-nek vagy G-nek van igaza?

(HF) d) F azt állítja, hogy ha egy derékszögű háromszög befogói a és b , átfogója c , akkor $a^2 + b^2 = c^2$. Hogyan bizonyíthatná F az állítását?

e) F azt állítja, hogy egy másodfokú egyenletnek lehetnek negatív gyökei. Hogyan bizonyíthatná F az állítását?

f) F azt állítja, hogy egy másodfokú egyenletnek lehet 3 gyöke. G szerint F téved. Hogyan bizonyíthatná G az állítását?

3. Az alábbiakban megpróbáljuk megoldani a következő egyenletet!

$$\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x-3} = 1 \quad \text{Emeljük köbre mindkét oldalt!}$$

$$1-x + 3(\sqrt[3]{1-x})^2 \sqrt[3]{x-3} + 3\sqrt[3]{1-x}(\sqrt[3]{x-3})^2 + x-3 = 1$$

$$-2 + 3\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{x-3}(\sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x-3}) = 1$$

Vegyük észre, hogy a baloldalon a zárójelben levő összeg az eredeti egyenlet szerint 1.

$$\sqrt[3]{1-x}\sqrt[3]{x-3} = 1$$

$$(1-x)(x-3) = 1$$

$$x = 2$$

Tényleg megoldás ez? Mit rontottunk el? Gondoljuk végig, hogy a fenti levezetés mit bizonyít, és mit nem bizonyít!

4. Formalizáljuk, azaz írjuk fel csak logikai jelekkel az alábbi állításokat!
- a) Nem igaz, hogy P vagy Q. b) Sem Q, sem P. c) Nem P, ha nem Q.
 d) P pedig nem is Q. e) Csak akkor P, ha Q. f) Sem P, sem Q.
 (HF) g) Q, feltéve, hogy P. h) Nem P, mégis Q. i) P vagy Q, de nem mindkettő.
 j) Nem igaz, hogy ha P, akkor egyúttal Q is.
5. Oldjuk meg a következő két feladatot!
- a) Oldjuk meg az $y^2 > 25$ egyenlőtlenséget!
 b) Keressünk meg azokat az Y értékeket, amelyekre igaz az, hogy ha $y > Y$, akkor $y^2 > 25$.
- Azonos-e a két feladat megoldáshalmaza? Megoldása-e az (a), illetve a (b) feladatnak az $y = -7$? Ekvivalens-e az (a) és a (b) feladat?
6. (HF) Egy szigeten olyan lakosok élnek, akik csak hétfőn, szerdán és pénteken mondanak igazat, a hét többi napján hazudnak. Mikor hangozhattak el a következő mondatok?
- a) Holnap igazat fogok mondani.
 b) Holnap és holnapután is hazudni fogok.
7. (HF) Írjuk fel az alábbi állítások tagadását!
- a) Kék az ég és zöld a fű.
 b) Ki korán kel, aranyat lel.
 c) Sötétben minden tehén fekete.

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak oldalról is.