2013 április 30. **Az analízis megalapozása** 1. csoport

19. feladatsor

1. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

$a)\ \lim\limits_{x\to 0+} x\cdot\sin\frac{1}{x}$ $\qquad (HF)\ b)\ \lim\limits_{x\to 0-} x\cdot\sin\frac{1}{x}$ $\qquad c)\ \lim\limits_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}$

2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $[a,b]$-n folytonos f függvény esetén $f([a,b])$ korlátos zárt intervallum!

3. Bizonyítsuk be átviteli elv segítségével, hogy ha az f függvény folytonos a-ban, a g függvény pedig folytonos $f(a)$-ban, akkor $g\circ f$ folytonos a-ban!

4. Hova tarthat a $(b_n)^n$ sorozat, ha a b_n sorozat határértéke

   a) 3 $\qquad$ b) 1 $\qquad$ c) $-\frac{1}{3}$

   (HF) d) $\frac{1}{3}$ $\qquad$ e) 0 $\qquad$ f) -3 $\qquad$ g) -1

5. Mi a következő két állítás logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

   a) **P:** az (a_n) sorozat konvergens $\qquad$ **Q:** $|a_{n+2}-a_n|\to 0$

   (HF) b) **P:** az (a_n) sorozat konvergens $\qquad$ **Q:** $|a_{2n}-a_n|\to 0$

   c) **P:** az (a_n) sorozat konvergens $\qquad$ **Q:** $|a_{n+1}-a_n|\to 0$

6. (HF) Mondjuk ki a Cauchy-kritériumról szóló tételt az alábbi határértékekre

$a)\ \lim\limits_{x\to a+} f(x) \qquad b)\ \lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$

7. (HF) Bizonyítsuk be az átviteli elv segítségével, hogy ha egy periodikus függvény nem konstans, akkor nincs határértéke a végtelenben!

8. (HF) Fejezzük be a Bolzano tétel szuprémumos bizonyítását, azaz lássuk be, hogy ha $f\in C[a,b]$, $f(a)<c<f(b)$ és $\alpha=\sup\{x\in[a,b]: f(x)<c\}$, akkor $f(\alpha)=c$.

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti` oldalról is.