2013 április 5. **Az analízis megalapozása** 1. csoport

12. feladatsor

1. Melyik sorozat korlátos alulról, melyik korlátos felülről, és melyik sorozat korlátos? Melyik sorozat konvergens, melyik divergens? Melyik sorozatnak van határértéke? Adjuk meg a létező határértékeket, és indokoljuk meg az eredményeket!

$$a)\ n^{-2} \qquad b)\ b_n = \begin{cases} 1+\dfrac{1}{n}, & \text{ha } n \text{ prím} \\ 2-\dfrac{1}{n} & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$(HF)\quad c)\ 2^{-n} \qquad d)\ \left(-\frac{2}{3}\right)^n \qquad e)\ (-1)^n+3$$

2. Tegyük fel, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 5$. Következik-e ebből, hogy
   a) $(\forall\varepsilon > 0)\quad (\exists n_0 \in \mathbb{R})\quad (n > n_0 \Longrightarrow |5 - a_n| < \varepsilon)$?
   b) $(\exists K \in \mathbb{R})\quad (\forall n \in \mathbb{N}^+)\quad |a_n| < K$?

3. Az (a_n) sorozatnak nincs legnagyobb tagja. Következik-e ebből, hogy a sorozat végtelenhez divergál?

4. Mi az alábbi sorozatok határértéke? Ellenőrizzük a definíciót! Ha véges a határérték, akkor mutassunk küszöbindexet $\varepsilon = 10^{-6}$-hoz, ha végtelen, akkor $P = 10^6$-hoz, ha pedig mínusz végtelen, akkor $P = -10^6$-hoz!

$$a)\ \frac{2n+1}{n+1} \qquad (HF)\ b)\ n^2-n^3$$

5. Melyik állításból következik, hogy a sorozat konvergens?
   a) $(\forall\varepsilon > 0)\quad (\exists n_0 \in \mathbb{R})\quad (n > n_0 \Longrightarrow |a_n - 5| < 2\varepsilon)$
   b) $(\forall n \in \mathbb{N}^+)\quad |a_n| < 5$

6. (HF) Írjuk fel logikai jelekkel, de a határték jelölései és tagadásjel (valamint $\nexists$ és $\not\forall$ jelek) nélkül az alábbi állításokat!
   a) Az (a_n) sorozat nem tart ∞-hez.
   b) A (b_n) sorozat nem tart $-\infty$-hez.
   c) A (c_n) sorozat oszcillálva divergens.

7. (HF) Az a_n sorozat ∞-hez divergál. Következik-e ebből, hogy
   a) az a_n sorozatnak nincs legnagyobb tagja;
   b) az a_n sorozatnak van legkisebb tagja?

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti` oldalról is.