2011 május 2. **Az analízis megalapozása** 1. csoport 2010-2011/II. félév

9. feladatsor

1. Döntsük el az alábbi sorozatokról, hogy van-e konvergens részsorozatuk!

   $a)\ (-1)^n \qquad b)\ \sin(n) \qquad (HF)\ c)\ \frac{1}{n} \qquad d)\ \sqrt{n} \qquad e)\ \sqrt{n}-[\sqrt{n}]$

2. Mondjuk ki az alábbi határértékekre vonatkozó csendőrszabályt!

   $a)\ \lim_{x\to a+} f(x)=b \qquad (HF)\ b)\ \lim_{x\to -\infty} f(x)=b \qquad c)\ \lim_{x\to\infty} f(x)=-\infty$

3. Határozzuk meg az alábbi határértékeket!

   $a)\ \lim_{x\to 0+} x\cdot\sin\frac{1}{x} \qquad (HF)\ b)\ \lim_{x\to 0-} x\cdot\sin\frac{1}{x} \qquad c)\ \lim_{x\to 0} x\cdot\sin\frac{1}{x}$

4. a) Írjuk fel a Cauchy-kritérium tagadását egy (a_n) sorozatra!

   b) Mi a felírt állítás logikai kapcsolata az "(a_n) divergens" állítással?

5. Egy (a_n) sorozatról tudjuk, hogy $|a_n-a_m|<\frac{1}{n+m}$ minden n,m-re. Bizonyítsuk be, hogy a sorozat konvergens!

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $[a,b]$-n folytonos f függvény esetén $f([a,b])$ korlátos zárt intervallum!

7. Mondjuk ki az alábbi határértékekre vonatkozó átviteli elvet!

   $a)\ \lim_{x\to\infty} f(x)=b \qquad (HF)\ b)\ \lim_{x\to a+} f(x)=-\infty \qquad c)\ \lim_{x\to -\infty} f(x)=\infty$

8. Bizonyítsuk be, hogy ha minden n-re $a_n\ge 0$, akkor a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ végtelen sornak van (véges vagy végtelen) összege!

9. (HF) Mutassunk olyan (a_n) és (b_n) sorozatokat, amelyekre $\lim_{n\to\infty} a_n=\infty$, $\lim_{n\to\infty} b_n=0$ és

   a) $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=0$!

   b) $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=7$!

   c) $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=\infty$!

   d) $\lim_{n\to\infty}(a_n\cdot b_n)=-\infty$!

   e) az $(a_n\cdot b_n)$ sorozatnak nincs sem véges, sem végtelen határértéke!

10. (HF) Határozzuk meg az alábbi sorozat határértékét, ha van! (Az n. tagban n darab gyökjel és n darab 3-as van.)

$$\sqrt{3+\sqrt{3+\ldots+\sqrt{3+\sqrt{3}}}}$$

11. (HF) Igaz-e, hogy ha f folytonos 0-ban, akkor $\lim_{n\to\infty} f(\frac{1}{n})=0$?

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.