

2011 április 11. Az analízis megalapozása 1. csoport 2010-2011/II. félév
8. feladatsor

1. a) Tegyük az alábbi sorozatokat nagyságrend szerint sorba!

$$(n^7), \quad (n^2 + 2^n), \quad (100\sqrt{n}), \quad \left(\frac{n!}{10}\right)$$

(HF) b) Keressük meg az alábbi sorozatok között az összes aszimptotikusan egyenlő párt!

$$(n!), \quad (n^n), \quad (n! + n^n), \quad (\sqrt{n}), \quad (\sqrt[n]{n}), \quad (\sqrt{n+1}), \quad (\sqrt[n]{2})$$

2. Határozzuk meg a határértékét, ha van!

$$a) 0, 99^n n^2 \quad b) \frac{3^n - \sqrt{n} + n^{10}}{2^n - \sqrt[n]{n} + n!} \quad c) \sqrt[n]{2^n - n^2} \quad d) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$$

3.

$$\inf\{\sqrt[n]{2} : n \in \mathbb{N}\} = ?$$

4. a) Igaz-e minden $(a_n), (b_n)$ sorozatpárra (amelyre minden n -re $a_n \neq 0, b_n \neq 0$), hogy $a_n/b_n \rightarrow 0 \iff b_n/a_n \rightarrow \infty$?

b) Igaz-e minden végtelenhez tartó $(a_n), (b_n)$ sorozatpárra (amelyre minden n -re $a_n \neq 0, b_n \neq 0$), hogy $a_n/b_n \rightarrow 0 \iff b_n/a_n \rightarrow \infty$?

5. Legyenek (a_n) és (b_n) végtelenhez tartó sorozatok. Mi az (i) és az (ii) állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

$$(i) a_n \sim b_n \quad (ii) a_n - b_n \rightarrow 0$$

6. (HF) Mutassunk olyan (a_n) és (b_n) sorozatokat, amelyekre $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = -\infty$ és

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 0 ! \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = 7 ! \\ c) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \infty ! \quad d) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = -\infty !$$

7. (HF) a) Igaz-e, hogy két divergens sorozat összege mindig divergens?

b) Igaz-e, hogy két divergens sorozat szorzata mindig divergens?

8. (HF) Határozzuk meg a határértékét, ha van!

$$a) \sqrt[n]{2^n + n^2} \quad b) \frac{(-10)^n}{n!} \quad c) \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad d) \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} \quad e) \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n$$

9. (HF) Vannak-e olyan (a_n) és (b_n) sorozatok, amelyekre $a_n \rightarrow \infty, b_n \rightarrow -\infty$ és

$$a) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = 0 ! \quad b) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = 7 ! \\ c) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = \infty ! \quad d) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n/b_n) = -\infty !$$

10. (HF) Mi az (i) és az (ii) állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből következik a másik?

$$a) (i) a_n \rightarrow 0 \quad (ii) |a_n| \rightarrow 0 \\ b) (i) a_n \rightarrow 3 \quad (ii) |a_n| \rightarrow 3$$

11. (HF) Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n -re $n! > \left(\frac{n}{e}\right)^n$.