2011 március 28. **Az analízis megalapozása** 1. csoport 2010-2011/II. félév

6. feladatsor és gyakorló feladatok

1. Legyen H egy nemüres számhalmaz. Mi a következő állítások logikai kapcsolata?
   (i) H felülről korlátos
   (ii) $\forall h \in H \quad \exists K \in \mathbb{R} \quad h < K$
2. Legyen H egy nemüres számhalmaz. Mit jelentenek a következő állítások?
   a) $\forall x \in H \quad \exists y \in H \quad x < y$
   b) $\forall y \in H \quad \exists x \in H \quad x < y$
3. Legyen H egy nemüres számhalmaz. Írjuk fel logikai kvantorokkal, hogy
   a) H-nak nincs minimuma.
   b) H felülről nem korlátos.

Gyakorló feladatok:

1. Fogadjuk el igaznak, hogy ki korán kel, aranyat lel. Melyik állítás igazsága következik ebből?
   a) Aki későn kel, nem lel aranyat.
   b) Aki aranyat lelt, az korán kelt.
   c) Aki nem lelt aranyat, az későn kelt.
2. $A_1, A_2, \ldots$ állítások egy sorozata. Mi következik az alábbiakból?
   a) A_{100} igaz. Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz.
   b) A_{100} igaz. Ha A_n hamis, akkor A_{n+1} is hamis.
   c) A_1 és A_2 igaz. Ha A_n és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} is igaz.
   d) A_1 hamis. Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz.
   e) A_1 igaz. Ha A_n hamis, akkor A_{n-1} is hamis.
   f) A_1 igaz. Ha $A_1, A_2, \ldots, A_n$ mind igaz, akkor A_{n+1} is igaz.
   g) A_1 igaz. Ha A_n és A_{n+1} igaz, akkor A_{n+2} is igaz.
   h) Ha A_n igaz, akkor A_{n+1} is igaz. A_{2^n} hamis minden n-re.
3. Legyen H valós számok egy halmaza. Mit jelentenek röviden magyarul az alábbi formulák?
   a) $(\exists x)\ (x \in H)$
   b) $(\exists x)(\exists y)\ (x \in H \wedge y \in H \wedge x \neq y)$
   c) $(\forall x \in H)(\forall y \in H)(\forall z \in \mathbb{R})\ (x < z < y \Longrightarrow z \in H)$
4. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív egész n-re
$$\sqrt[n]{3} - 1 \leq \frac{2}{n}\ !$$
5. Adjunk meg olyan n-t, amelyre
$$a)\ 1,00001^n > 1000 \qquad b)\ 0,9999^n < 0,0001 \qquad c)\ \sqrt[n]{2} < 1,00001$$

6. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b, c nemnegatív valós számokra fennállnak az alábbi egyenlőtlenségek!

$$a)\ \sqrt[n+1]{ab^n} \le \frac{a+nb}{n+1} \qquad b)\ a^2b + b^2c + c^2a \ge 3abc$$

7. Írjuk fel az alábbi állítások tagadását és igazságtábláját!

$$a)\ \overline{A} \Longrightarrow B \qquad b)\ \overline{B} \Longrightarrow \overline{A} \qquad c)\ A \Longrightarrow \overline{B} \qquad d)\ B \Longrightarrow \overline{A} \qquad e)\ \overline{\overline{A} \Longrightarrow \overline{B}}$$

8. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény. Mit jelentenek az alábbi állítások?
   a) $(\forall x, y \in \mathbb{R})\ x < y \Longrightarrow f(x) < f(y)$
   b) $(\forall x \in \mathbb{R})\ f(x) = f(-x)$
   c) $(\exists p \in (\mathbb{R} \setminus 0))\ (\forall x \in \mathbb{R})\ f(x+p) = f(x)$
9. Állapítsuk meg a két állítás logikai kapcsolatát, azaz döntsük el, hogy igaz-e (i)$\Longrightarrow$(ii) illetve (ii)$\Longrightarrow$(i)!
   (i) $(A \subset B) \wedge (C \subset D)$
   (ii) $A \setminus D \subset B \setminus C$
10. Bizonyítsuk be, hogy ha három nemnegatív szám szorzata 1, akkor összegük legalább 3 !
11. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény. Írjuk fel logikai jelekkel azt, hogy
    a) f konstans függvény!
    b) f egy másodfokú polinom!
12. Hol van és mennyi a minimuma az $f(x) = x + \frac{3}{x}$ függvénynek, ha $x > 0$?
13. Igaz-e, hogy ha n kétjegyű páros prímszám, akkor n^2 páratlan?
14. Tagadd az alábbi mondatokat!
    a) Nincs olyan szerelem, ami el nem múlik.
    b) Ha nem esik az eső, elmegyek bevásárolni.
    c) Aki nem old meg minden gyakorlatra sok feladatot, annak itt nem terem sok babér.
    d) Hókuszpók melléfog és mérgesen morog.
15. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b valós számokra $|a| - |b| \le |a - b| \le |a| + |b|$!
16. Bizonyítsuk be az alábbiakat tetszőleges $A_1, \dots, A_n$ halmazokra!

$$a)\ \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} \qquad b)\ \overline{\bigcap_{i=1}^{n} A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} \overline{A_i}$$

17. Állapítsuk meg a két állítás logikai kapcsolatát, azaz döntsük el, hogy igaz-e (i)$\Longrightarrow$(ii) illetve (ii)$\Longrightarrow$(i)!

$$(i)\ x \in A \vee x \in B \qquad (ii)\ x \in A \cap B$$

18. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges A, B halmazokra $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$!

19. Tudjuk, hogy három pozitív szám szorzata 1.

    a) Mennyi lehet legalább a reciprokösszegük?

    b) Mennyi lehet legfeljebb a reciprokösszegük?

20. Bizonyítsuk be, hogy bármely két valós szám között van véges tizedes tört!

21. Milyen halmazt alkothat egy halmaz felső korlátjainak halmaza? (Vagyis adjuk meg az összes olyan halmazt, amely valamely halmaz felső korlátainak halmaza!)

22. Lehet-e a H halmaz szuprémuma c, ha

    a) $k < c$ és k felső korlátja H-nak?

    b) $k > c$ és k alsó korlátja H-nak?

    c) $\exists h \in H \quad h > c$?

    d) c maximuma H-nak?

    e) c minimuma H-nak?

23. Legyen H a valós számok egy nem üres részhalmaza. Mi a következő állítások logikai kapcsolata, azaz melyikből melyik következik?

    (i) H alulról nem korlátos.

    (ii) H-nak nincs legkisebb eleme.

    (iii) $(\forall x \in H)\ (\exists y \in H)\ y < x$.

24. Van-e olyan $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$ halmaz, amelyre

    a) $\sup A > \inf A$?

    b) $\sup A < \inf A$?

    c) $\sup A = \inf A$?

25. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $A, B \subset \mathbb{R}$ halmazokra

$$\Big((\forall x \in A)\ (\exists y \in B)\ x \leq y\Big) \Longrightarrow \sup A \leq \sup B \ !$$

26. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a > 0$ valós és x, y racionális számokra $(a^x)^y = (a^y)^x$!

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.