

## 5. feladatsor

- Határozzuk meg a következő halmazok minimumát, maximumát, infimumát és szupremumát, ha vannak!
  - negatív irracionális számok halmaza
  - $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\}$
  - (HF)  $(0, 1) \cap \mathbb{Q}$
  - (HF)  $\{\frac{1}{n} + \frac{1}{k} : n, k \in \mathbb{N}^+\}$
- Tegyük fel, hogy  $A$  nemüres, felülről korlátos halmaz, és  $\sup A = b$ . Bizonyítsuk be, hogy ekkor minden  $\varepsilon > 0$ -hoz van olyan  $x \in A$ , amelyre  $x > b - \varepsilon$ !
- Tegyük fel, hogy  $A$  és  $B$  olyan nemüres számhalmazok, melyekre teljesül, hogy  $(\forall x \in A) (\forall y \in B) x < y$ . Következik-e ebből, hogy
  - $\sup A \leq \sup B$
  - $\sup A < \sup B$
- Állítás:** Az 1 a legnagyobb szám.  
**Bizonyítás:** Indirekt módon. Tegyük fel, hogy nem az 1 a legnagyobb szám, hanem  $A$ . Ekkor  $A > 1 > 0$ , továbbá  $A > A^2$ . Az utolsó egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív  $A$ -val osztva azt kapjuk, hogy  $1 > A$ , ami ellentmond az indirekt feltevésnek, tehát mégis az 1 a legnagyobb szám.  
Hol a hiba?
- Van-e olyan  $a_1, a_2, \dots$  számsorozat, amelyre az  $\{a_1, a_2, \dots\}$  halmaz korlátos, de nincs se maximuma, se minimuma?
- (HF) a) Mi a kapcsolat a véges tizedes tört alakban felírható számok halmaza és a racionális számok halmaza között?
  - Igaz-e, hogy minden irracionális szám végtelen tizedestört alakja egyértelmű?
  - Igaz-e, hogy minden racionális szám végtelen tizedestört alakja nem egyértelmű?
- (HF) Bizonyítsuk be a hatványozás azonosságait pozitív alap(ok) és egész kitevő(k) esetén!
- (HF) Tegyük fel, hogy  $\emptyset \neq A \subset B \subset \mathbb{R}$ . Mit mondhatunk  $\sup A$  és  $\sup B$  nagyságviszonyáról (vagyis milyen egyenlőtlenség igaz biztosan) és mit  $\inf A$  és  $\inf B$  nagyságviszonyáról?
- (HF) Igaz-e, hogy az  $A$  és  $B$  nemüres, korlátos halmazokra  $\inf A = \inf B$  és  $\sup A = \sup B$  is teljesül, akkor  $A \cap B \neq \emptyset$ ?
- (HF) Mely valós számok írhatóak fel egyértelműen végtelen  $n$ -edestört alakban minden  $n$ -re  $n$ -es számrendszerben?