2011 március 7. Az analízis megalapozása 1. csoport 2010-2011/II. félév

4. feladatsor

1. Bizonyítsuk be (az axiómákból), hogy minden valós számhoz van nála kisebb egész szám!

2. Mutassuk meg, hogy a Cantor axióma nem lenne igaz, ha zárt intervallumok helyett

   a) nyílt

   b) (HF) balról zárt, jobbról nyílt

   intervallumok szerepelnének!

3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges a, b valós számokra

$$|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b| \text{ !}$$

4. Igaz-e, hogy

   a) egy racionális és egy irracionális szám összege mindig irracionális?

   (HF) b) két irracionális szám összege mindig irracionális?

   (HF) c) két irracionális szám összege mindig racionális?

   (HF) d) két racionális szám összege mindig racionális?

5. Bizonyítsuk be, hogy a komplex számok teste nem rendezhető, azaz nem lehet megadni $\mathbb{C}$-n olyan rendezést, amelyre teljesül minden rendezési axióma!

6. Bizonyítsuk be, hogy bármely két valós szám között van irracionális szám!

7. (HF) Írjuk fel az Arkhimédeszi és a Cantor axióma tagadását!

8. (HF) Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges $a_1, \ldots, a_n$ valós számokra $|a_1 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + \ldots + |a_n|$!

9. (HF) Van-e olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre

   a) $\sqrt[n]{999} < 1,001$?

   b) $0,99^n < 10^{-10}$?

   c) $\dfrac{\sqrt{1} + \ldots + \sqrt{n}}{n^2} > 100$?

   d) $\dfrac{\sqrt{1} + \ldots + \sqrt{n}}{n} > 100$?

Továbbá házi feladat az összes előző feladatsorról elhalasztott feladat: 2cde, 4c, 5b és 7bc.

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.