2011 február 21. **Az analízis megalapozása** 1. csoport 2010-2011/II. félév

2. feladatsor

1. Bizonyítsuk be, hogy

$$(A \Longleftrightarrow B) \;=\; (A \Longrightarrow B) \wedge (A \Longleftarrow B) \;!$$

2. Írjuk fel az alábbi állítások tagadását!

   a) Kék az ég és zöld a fű.

   b) Ki korán kel, aranyat lel.

   c) Sötétben minden tehén fekete.

3. Bizonyítsuk be, hogy minden pozitív egész n esetén $(1+\frac{1}{n})^n \geq 2$!

4. Jelentse P(x) : „x páros”, H(x): „x hattal osztható”. Mit jelentenek a következő formulák, és igazak-e?

$$a)\ P(4) \wedge H(12) \qquad b)\ \forall x\ P(x) \Rightarrow H(x) \qquad c)\ \exists x\ P(x) \wedge \overline{H(x)}$$

$$(HF) \qquad d)\ \exists x\ P(x) \wedge H(x+1) \qquad e)\ \forall x\ H(x) \Rightarrow P(x) \qquad f)\ \forall x\ \overline{H(x)} \Rightarrow \overline{P(x)}$$

5. Írjuk fel logikai jelekkel (de a tagadás jele nélkül) az alábbi állításokat!

   a) Az a_n sorozat konvergens.

   b) Az a_n sorozat divergens.

   (HF) c) Az $f(x)$ függvény folytonos az a pontban.

   (HF) d) Az $f(x)$ függvény nem folytonos az a pontban.

6. Bizonyítsuk be, hogy van olyan n_0, amelyre $n > n_0$ esetén $3^n > 5n^2$ teljesül!

7. Egy táncmulatságon lányok és fiúk táncoltak. Jelölje $T(L, F)$ azt az állítást, hogy az L lány az este folyamán tá ncolt az F fiúval. Fordítsuk le emberi nyelvre az összes alábbi állítást! Minden egy sorban lévő állításpárnál döntsük el, hogy van-e különbség a két állítás között, következik-e valamelyikből a másik, ekvivalensek-e?

   a) (i) $(\forall L)(\exists F)\ T(L, F)$ (ii) $(\exists F)(\forall L)\ T(L, F)$

   b) (i) $(\exists L)(\exists F)\ T(L, F)$ (ii) $(\exists F)(\exists L)\ T(L, F)$

   c) (HF) (i) $(\forall L)(\forall F)\ T(L, F)$ (ii) $(\forall F)(\forall L)\ T(L, F)$

8. (HF) Tudjuk, hogy b és c olyan számok, hogy ha $b \mid 2520 \Longrightarrow c \mid 2520$. Mire következtethetünk abból, hogy

$$a)\ b \nmid 2520; \qquad b)\ c \nmid 2520\ ?$$

9. (HF) "Tétel: Minden ló egyszínű.

   Bizonyítás: Teljes indukcióval belátjuk, hogy bármely n ló egyszínű. $n = 1$-re az állítás nyilvánvaló. Tegyük fel, hogy igaz n-re, és ebből fogjuk $n + 1$-re belátni: adott $n + 1$ ló közül az indukciós feltevés miatt az $1., 2., \ldots, n.$ is egyszínű és a $2., \ldots, n., (n + 1).$ is egyszínű, tehát mind az $n + 1$ egyszínű."

   Jó ez? Ha nem, akkor hol a hiba?

10. (HF) Formalizáljuk, azaz írjuk fel csak logikai jelekkel az alábbi állításokat!

    a) Nem igaz, hogy P vagy Q. b) Sem Q, sem P. c) Nem P, ha nem Q.

    d) P pedig nem is Q. e) Csak akkor P, ha Q. f) Sem P, sem Q.

    g) Q, feltéve, hogy P. h) Nem P, mégis Q. i) P vagy Q, de nem mindkettő.

    j) Nem igaz, hogy ha P, akkor egyúttal Q is.

11. (HF) Igaz-e, hogy

$$a)\ (A \Longrightarrow B) = (B \Longrightarrow A)\ ? \qquad b)\ (A \Longrightarrow B) = (\overline{B} \Longrightarrow \overline{A})\ ?$$

$$c)\ (A \Longrightarrow B) = (\overline{A} \Longrightarrow \overline{B})\ ?$$

12. (HF) Tagadjuk az alábbi állításokat!

    a) Minden egér szereti a sajtot.

    b) Aki másnak vermet ás, maga esik bele.

    c) Minden asszony életében jön egy pillanat, mikor olyat akar tenni, amit nem szabad.

    d) Van, akit nem várnak, csak érkezik.

    e) Mindenki másképp csinálja.

    f) Londonban sej, van számos utca, és minden utcán van sarok.

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.