2011 február 14. Az analízis megalapozása 1. csoport 2010-2011/I. félév

1. feladatsor

Az első két feladatban szándékosan szerepelnek olyan matematikai fogalmak is, amelyeket nem ismernek. Ez nem okozhat gondot, mert most csak a logikai összefüggéseket kell érteni.

1. A híres Feit-Thompson-tétel azt mondja ki, hogy minden páratlan elemszámú véges csoport feloldható. A tétel alapján mit válaszolhatunk az alábbi kérdésekre? (Az is lehet, hogy semmit, vagyis a tételből semmit sem következik az adott kérdésre.)

   a) Van-e 111 elemű nem feloldható csoport?

   b) Van-e 112 elemű feloldható csoport?

   c) Van-e 111 elemű feloldható csoport?

   d) Van-e 112 elemű nem feloldható csoport?

   e) Igaz-e, hogy ha egy véges csoport nem feloldható, akkor páros elemszámú?

   f) Igaz-e, hogy ha egy véges csoport feloldható, akkor páratlan elemszámú?

   g) Igaz-e, hogy minden páratlan elemszámú nem feloldható véges csoport torziómentes?

   h) Igaz-e, hogy minden páratlan elemszámú véges csoport torziómentes vagy feloldható?

2. A matematika talán legfontosabb és leghíresebb sejtése a Riemann-sejtés, mely azt mondja ki, hogy a Rimann-féle zéta-függvény minden nem triviális komplex gyökének a valós része $1/2$. (A triviális gyökök a $-2, -4, -6, \ldots$.)

   a) Bizonyítja-e a sejtést, ha találunk egy olyan nem triviális komplex gyököt, melynek a valós része 0.5 ?

   b) Bizonyítja-e a sejtést, ha találunk egymillió olyan nem triviális komplex gyököt, melynek a valós része 0.5 ?

   c) Megcáfolja-e a sejtést, ha találunk egy olyan nem triviális komplex gyököt, melynek a valós része 0.498 ?

3. Balkezes Bendegúz a bal kezével csak igaz állításokat tud leírni, a jobb kezével pedig csak csak hamis állításokat. Melyik kezével írhatja le a következő mondatokat?

   a) Balkezes vagyok.

   b) Jobbkezes vagyok.

   c) Balkezes vagyok és Bendegúz a nevem.

   d) Jobbkezes vagyok és Bendegúz a nevem.

   e) Balkezes vagyok vagy Bendegúz a nevem.

   f) Jobbkezes vagyok vagy Bendegúz a nevem.

   g) A 0 se nem páros, se nem páratlan.

4. Ha kedd van, akkor Belgiumban vagyunk. Melyik állítás következik ebből?

   a) Ha szerda van, akkor nem Belgiumban vagyunk.

   b) Ha Belgiumban vagyunk, akkor kedd van.

   c) Ha nem Belgiumban vagyunk, akkor nincs kedd.

5. Hány olyan részhalmaza van a $H = \{1, 2, 3, \ldots 100\}$ halmaznak, amelyre igaz, hogy

   a) az 1 benne van a részhalmazban?

   b) az 1 és a 2 benne van a részhalmazban?

   c) az 1 vagy a 2 benne van a részhalmazban?

d) az 1 benne van a részhalmazban vagy a 2 nincs benne a részhalmazban?

e) ha az 1 benne van a részhalmazban, akkor a 2 benne van a részhalmazban?

f) Hány olyan részhalmaza van a $H = \{1, 2, 3, \dots 100\}$ halmaznak, amelyekre a fenti tulajdonságok nem teljesülnek? (Ez 5 külön feladat.)

6. Egy egész számokból álló H halmazról tudjuk, hogy valahányszor x és $x+1$ benne van a H halmazban valamilyen x-re, akkor $x+2$ is benne van H-ban. Következik-e ebből, hogy valahányszor y nincs benne H-ban, de $y-1$ benne van H-ban valamilyen y-ra, akkor $y-2$ nincs benne H-ban?

7. (HF) Fogadjuk el igaznak, hogy ki korán kel, aranyat lel. Melyik állítás igazsága következik ebből?

   a) Aki későn kel, nem lel aranyat.

   b) Aki aranyat lelt, az korán kelt.

   c) Aki nem lelt aranyat, az későn kelt.

8. (HF) Tanulni fogjuk ebben a félévben, hogy minden folytonos függvénynek van primitív függvénye. Ez és a múlt félévben tanultak alapján válaszoljunk az alábbi kérdéskre:

   a) Van-e olyan függvény, amelynek nincs primitív függvénye, de differenciálható?

   b) Van-e olyan függvény, amelynek van primitív függvénye, de nem differenciálható?

9. (HF) Matematika országban a bíró csak a bizonyítékoknak hisz. Például, ha F azt állítja, hogy van fekete oroszlán, akkor állításának helyességéről meggyőzheti a bírót azzal, ha mutat neki egy fekete oroszlánt.

   a) F azt állítja, hogy minden oroszlán fekete. Elég bizonyíték-e, ha mutat a bírónak egy fekete oroszlánt?

   b) F azt állítja, hogy minden oroszlán fekete, G pedig azt állítja, hogy F téved. Hogyan bizonyíthatná G az állítását?

   c) F azt állítja, hogy minden 2-re vegződő négyzetszám osztható 3-mal. G szerint F téved. Hogyan bizonyíthatná G az állítását? F-nek vagy G-nek van igaza?

   d) F azt állítja, hogy ha egy derékszögű háromszög befogói a és b, átfogója c, akkor $a^2 + b^2 = c^2$. Hogyan bizonyíthatná F az állítását?

   e) F azt állítja, hogy egy másodfokú egyenletnek lehetnek negatív gyökei. Hogyan bizonyíthatná F az állítását?

   f) F azt állítja, hogy egy másodfokú egyenletnek lehet 3 gyöke. G szerint F téved. Hogyan bizonyíthatná G az állítását?

10. (HF) Egy szigeten olyan lakosok élnek, akik csak hétfőn, szerdán és pénteken mondanak igazat, a hét többi napján hazudnak. Mikor hangozhattak el a következő mondatok?

    a) Holnap igazat fogok mondani.

    b) Holnap és holnapután is hazudni fogok.

11. (HF) Tegyük fel, hogy

    - nem mind hullamosó, aki szereti a spenótot;
    - minden matematikus hullamosó, vagy legalábbis nem szereti a spenótot;
    - vagy az igaz, hogy aki nem hullamosó, az matematikus, vagy pedig az, hogy aki hullamosó, az nem matematikus.

    Következik-e a fentiekből, hogy aki szereti a spenótot, az nem matematikus?

A feladatsorok (remélhetően) letölthetőek a `www.cs.elte.hu/anal/keleti/gyak` oldalról is.