

Görbék hossza Többváltozós analízis 2 gyakorlathoz

1. Milyen integrállal egyezik meg következő függvénygrafikonok ívhossza a megadott intervallumokon? (Kiszámolni nem kell egyelőre!)
 - a) $\operatorname{ch} x$ a $[-1, 1]$ -en,
 - b) $\log(\cos x)$ a $[0, \frac{\pi}{4}]$ -en,
2. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges folytonos görbe ívhossza legalább a két végpont távolsága!
3. a) Adjunk meg paraméteres görbeként egy olyan ellipszist, melynek féltengelyei 2 és 3.
b) Milyen integrállal egyezik meg ennek az ellipszisnek a kerülete azaz a görbe ívhossza? (Kiszámolni nem kell.)
4. Van két azonos magasságú henger. Az egyik sugara 10cm, a másik sugara 5cm. Mindkét hengerre az aljától a tetejéig felcsavarunk egy-egy cérnaszálat úgy, hogy a cérnaszál érintője mindig 60 fokos szöget zárjon be a vízszintes síkkal. Melyik cérnaszál lesz hosszabb?
5. Tekintsük az $r = \varphi$ poláregyenlettel megadott Arkhimédeszi spirált, azaz a spirál pontjai a $(t; t)$ polárkoordinátájú pontok, ahol $t \geq 0$.
 - a) Rajzoljuk le ezt a spirált!
 - b) Írjuk fel paraméteres görbeként Descartes-koordinátákkal!
 - c) Számítsuk ki a $t \in [0, 7\pi]$ paraméterintervallumhoz tartozó spiráldarab hosszát! (Felhasználhatjuk, hogy

$$\int \sqrt{1+x^2} dx = \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + C.$$

6. Mutassunk olyan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ folytonos függvényt, amelynek nincs véges ívhossza.
7. Milyen integrállal egyezik meg a következő függvénygrafikonok ívhossza a megadott intervallumokon? Számítsuk ki az ívhosszakat!
 - (a) $\operatorname{ch} x$ a $[-1, 1]$ -en,
 - (b) e^x a $[0, 1]$ -en (használjuk a $t = \sqrt{1 + e^{2x}}$ helyettesítést!)
 - (c) $x^2/2$ a $[0, 2]$ -n (használjuk az $x = \operatorname{sh} t$ helyettesítést!).