Feladatok a 2019 febr 21.-i geometriai mértékelmélet gyakorlatra

1. Egy tűt folytonos mozgatással megfordítunk a síkon. Bizonyítsuk be, hogy a végigsöpört halmaz mértéke mindenképpen pozitív.

2. Lássuk be, hogy

a) ha $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ folytonos, akkor rektifikálható $\Leftrightarrow$ átparaméterezhető egy Lipschitz görbévé,

b) ha $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ rektifikálható, akkor Lipschitz görbével fedhető.

3. Lássuk be, hogy a tipikus $K \in \mathcal{K}([0,1])$ halmaz lineárisan független $\mathbb{Q}$ felett.

4. Mutassuk meg, hogy van olyan Riemann-integrálható $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ függvény, amelyhez minden irányban van olyan irányú szekció, amelyen mint $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvény nem Riemann-integrálható.

5. a) Bizonyítsuk be, hogy van olyan nullmértékű Borel halmaz a síkon, amely minden $p \in [0,1] \times [0,1]$ ponthoz tartalmaz p középpontú tengelypárhuzamos négyzetvonalat.

b) Bizonyítsuk be, hogy van olyan 1 Hausdorff-dimenziós kompakt halmaz a síkon, amely minden $p \in [0,1]^2$ ponthoz tartalmaz p középpontú tengelypárhuzamos négyzetvonalat.

Segítség a (b) részhez: Legyen $\mathcal{K}$ azon $K \subset [0,1]^2 \times [2,3]$ kompakt halmazok családja, amelyek vetülete $[0,1]^2$-re $[0,1]^2$. Mutassuk meg, hogy a tipikus $K \in \mathcal{K}$ halmaz jó konstrukciót kódol!

A feladatsorok elérhetőek a `http://www.cs.elte.hu/analysis/keleti` oldalon.