

## Feladatok a 2023. március 13-i geometriai mértékelmélet gyakorlatra

7. Vegyünk a síkon egy egységnyezetet, és tekintsük a négyzet csúcsaiból történő  $0 < \lambda < 1/4$  arányú nagyításokat. Legyen  $K_\lambda$  az ezekhez a hasonlóságokhoz tartozó önhasonló halmaz. Jelölje  $s$  a  $K_\lambda$  Hausdorff dimenzióját.

- a) Mennyi  $s$ ?
- b) Mutassunk végtelen sok irányt, amelyben a vetület  $\mathcal{H}^s$  mértéke 0.
- c) Vegyük azokat az irányokat, amelyben a vetület  $\mathcal{H}^s$  mértéke pozitív. Mutassuk meg, hogy ezen irányok halmazának a belseje nem üres.

8. Legyenek  $A \subseteq \mathbb{R}^m$  és  $B \subseteq \mathbb{R}^n$  olyan Borel halmazok, melyekre  $\mathcal{H}^s(A) > 0$  és  $\mathcal{H}^t(B) > 0$  valamely  $s, t > 0$  valós számokra. Mutassuk meg, hogy az  $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{m+n}$  halmazra  $\mathcal{H}^{s+t}(A \times B) > 0$ . Mit mondhatunk ezek alapján  $A \times B$  Hausdorff dimenziójáról  $\dim_H A$  és  $\dim_H B$  ismeretében?

9. Konstruáljunk olyan  $B \subseteq \mathbb{R}^2$  Borel halmazt, melyre  $\dim_H B = 2$ , és minden egyenesre vett vetülete üres belsejű.

10. Számoljuk ki a tipikus  $K \in \mathcal{K}([0, 1])$  alsó box-dimenzióját!

11.\* Konstruáljunk olyan  $K$  kompakt 1-halmazt ( $0 < \mathcal{H}^1(K) < \infty$ ) a síkon, amelynek minden egyenesre vett vetülete nullmértékű.

A feladatsorok elérhetőek a <https://keletita.web.elte.hu> oldalon.