Feladatok a 2023. március 6-i geometriai mértékelmélet gyakorlatra

1. Egy tűt folytonos mozgatással megfordítunk a síkon. Bizonyítsuk be, hogy a végigsöpört halmaz mértéke mindenképpen pozitív.

2. Mutassuk meg, hogy van olyan Riemann-integrálható $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ függvény, amelyhez minden irányban van olyan irányú szekció, amelyen mint $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvény nem Riemann-integrálható.

3. Legyen (X, d) teljes metrikus tér, $K_n \in \mathcal{K}(X)$ Cauchy sorozat a d_H Hausdorff-metrika szerint. Legyen $L_n = \overline{\cup_{i=n}^{\infty} K_i}$.

a) Bizonyítsuk be, hogy minden n-re L_n kompakt.

b) Lássuk be, hogy $d_H(K_n, L_n) \to 0$.

c) Mutassuk meg, hogy tetszőleges metrikus térben, ha $C_1 \supset C_2 \supset \dots$ nemüres kompaktak, akkor $C_n \to \cap_{k=1}^{\infty} C_k$ a d_H metrika szerint.

d) Bizonyítsuk be, hogy teljes metrikus térben a nemüres kompakt halmazok metrikus tere a Hausdorff-metrikával teljes.

4. Gondoljuk meg, hogy $[0,1]^d$-ről mit mond a Frostman-lemma.

5. Mutassuk meg, hogy ha $A \subset \mathbb{R}^d$ Borel, $0 < s < t$ és $\mathcal{H}^t(A) > 0$, akkor $\mathcal{C}^s(A) > 0$

6. Számoljuk ki a tipikus $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ folytonos függvény grafikonjának Hausdorff és felső box-dimenzióját!

A feladatsorok elérhetőek a `https://keletita.web.elte.hu` oldalon.