Differenciálegyenletek kiegészítő feladatsor

1. a) Rajzoljunk iránymezőt az $yy' + x = 0$ differenciálegyenlethez, az alapján sejtsük meg a differenciálegyenlet megoldásait, majd visszahelyettesítéssel ellenőrizzük, hogy ezek tényleg megoldások!

   b) Keressük meg a fenti differenciálegyenlet általános megoldását integrálással is!

   c) Oldjuk meg az $yy' + x = 0$, $y(3) = -4$ kezdetiérték-problémát!

2. Newton lehűlési törvénye szerint egy állandó hőmérsékletű környezetben lévő tárgy hőmérsékletének változási sebessége egyenesen arányos a környezet hőmérsékletének és a tárgy hőmérsékletének különbségével. Írjuk fel ez alapján a lehűlési törvényt differenciálegyenlet alakban, majd oldjuk meg a differenciálegyenletet!

3. Egy tavon csónakázunk. Ha abbahagyjuk az evezést, akkor a víz ellenállása lefékezi a hajót. Tegyük fel, hogy ennek a fékezőerőnek a nagysága arányos a hajó sebességével. Írjunk fel ez alapján differenciálegyenletet a víz által lefékeződő csónak

   a) sebességére.

   b) helyzetére.

   c) Oldjuk meg (legalább) az egyik differenciálegyenletet!

4. Egy nagy bögre 90 °C fokos tea gőzölög a 20 °C fokos konyhában. Van egy jégkockánk, amelyről azt tudjuk, hogy ha beletesszük ennyi T °C fokos teába akkor abból nagyon hamar $0,9(T-10)$ °C fokos tea lesz (feltéve persze, hogy $T \geq 10$). Tehát ha kapásból betesszük ezt a jégkockát, akkor az nagyon gyorsan lehűtené a teánkat $0,9(90-10) = 72$ °C fokra. Csakhogy 45 °C a legforróbb, amit meg tudunk inni, tehát utána még várnunk kellene amíg lehül 45 °C fokra, pedig roppant türelmetlenek vagyunk.

   a) Hány fokosra kell lehűlni (magától) a teának, hogy utána a jégkocka már pont a kívánt 45 °C fokosra hűtse?

   b) Mikor járunk jobban, azaz mikor kell kevesebbet várnunk az áhított 45 °C fok eléréséhez: ha egyből tesszük a teába a jeget, vagy ha előbb kivárjuk, hogy magától lehűljön az (a) feladatban kiszámolt hőmérsékletre?

   c) Hányszor többet kell annak várnia, aki rosszul dönt?

   (Feltesszük, hogy a jégkocka berakása nem változtatja meg a Newton leűlési törvényben szereplő arányossági tényezőt.)

5. Egy végtelenül nyújtható, kezdetben 10 cm hosszú gumiszalagunk van, amelynek egyik vége a falhoz van rögzítve, és ezen a végén a hangyák kedvenc csemegéje van. A másik végéről elindul egy hangya a gumiszalagon a fal felé 1 cm/s sebességgel, de ugyanekkor egy gonosz manó elkezdi húzni ellenkező irányba a gumiszalag végét 100 cm/s sebességgel.

   a)* Jelöljük $y(t)$-vel a hangya faltól vett távolságát t idő után. Írjuk fel azt a kezdetiérték-problémát, amelynek megoldása ez az $y(t)$ függvény!

   b) Oldjuk meg a kapott differenciálegyenletet, majd döntsük el, hogy eléri-e előbb-utóbb a falat a hangya!

   c)** Döntsük el differenciálegyenlet nélkül, hogy eléri-e előbb-utóbb a falat a hangya!

6. a) Rajzoljunk iránymezőt a(z előadáson tanult) korlátlan növekedésű populáció modell $x'(t) = kx(t)$ differenciálegyenletéhez (egy szabadon választott rögzített k érték mellett)!

   b) Keressük meg a fenti differenciálegyenlet általános megoldását (általános k-ra)!

   c) Egy baktériumtenyészetben 12:00-kor 3 millió baktérium van, 13:00-kor 5 millió. Feltételezve, hogy a szaporodás a fenti modell szerint történik, határozzuk meg k értékét, majd azt, hogy mennyi volt az egyedszám 12:10-kor!

7. Egy száz literes tele tartályban kezdetben tiszta víz van. Egy csőből percenként 10 liter 30 g/l sókoncentrációjú tengervíz kezd (azonnal tökéletesen elkeveredve) belefolyni a medencébe, és egy túlfolyón át ugyanennyi víz távozik is a tartályból. Mennyi lesz a só koncentrációja a tartályban 20 perc után?

8. Határozzuk meg azokat a differenciálható függvényeket, melyek grafikonjának minden érintője átmegy az origón!

9. Határozzuk meg azokat a differenciálható függvényeket, melyek grafikonjának minden érintőjére az teljesül, hogy az érintési pont épp felezi az érintőnek a koordinátatengelyek közötti szakaszát!

10. Találjunk ki további olyan feladatot, amely differenciálegyenlethez vezet, és ha tudjuk, oldjuk is meg az egyenletet!

11. a) Oldjuk meg a rugón rezgő test mozgását leíró $mx''(t) = -Dx(t)$ differenciálegyenletet, ahol t jelöli az időt, $x(t)$ az egyensúlyi helyzettől való kitérés nagysága t idő eltelte után, m a test tömege, D pedig a rugóállandó!

    b) Mi a periódusa a kapott függvényeknek?

    c) Legyen $m = 2$ kg, $D = 200$ N/m. Tegyük fel, hogy az egyensúlyi helyzethez képest 10 cm-re kihúzzuk a rugóra tett testet, majd elengedjük. Írjuk fel a kapott kezdeti érték problémát, majd oldjuk is meg!

12. Oldjuk meg az alábbi differenciálegyenleteket!

    a) $xy' + y^2 = -1$ b) $f'(x) - xf(x) = x^3$ c) $f''(t) - f'(t) + 6f(t) = 0$

    d) $y'(x)\cos x + y(x)\sin x = 1$ e) $f'(x) = (f(x))^2 + 1$ f) $y'' + 4y' + 4y = 0.$

13. Oldjuk meg az alábbi kezdeti érték problémákat!

    a) $y' = e^{y-x}, \quad y(1) = 2$

    b) $y'' - y' - 6y = 0, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 2$

14. a) Oldjuk meg a radioaktív bomlás $x'(t) = -kx(t)$ egyenletet, ahol k a radioaktív anyagra jellemző állandó!

    b) A kormeghatározásra használt C_{14} rádioaktív szénizotóp felezési ideje 5730 év, azaz ennyi év után csökken a felére a C_{14} aránya a teljes szénmennyiséghez viszonyítva. Határozzuk meg ez alapján a C_{14}-re jellemző fenti k állandót!

    c) Ha az ősember barlangjában talált mamut csontjában a C_{14} aránya 15%-a az élő anyagra jellemző aránynak, akkor kb. hány éve ejtették el ezt a mumutot?

15. A 100 fokos forró lekvárt kiraktuk hűlni a 20 fokos levegőre. A lekvár hőmérséklete 10 órakor 30 fok, 11 órakor 25 fok. Mikor raktuk ki a lekvárt?