

Cavalieri elv Többváltozós analízis 2 gyakorlathoz

1. Mutassuk meg a definíciót használva, hogy a $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ csúcsú háromszöglemez Jordan mértéke $1/2$.
2. Legyen az N normáltartomány az

$$\{a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

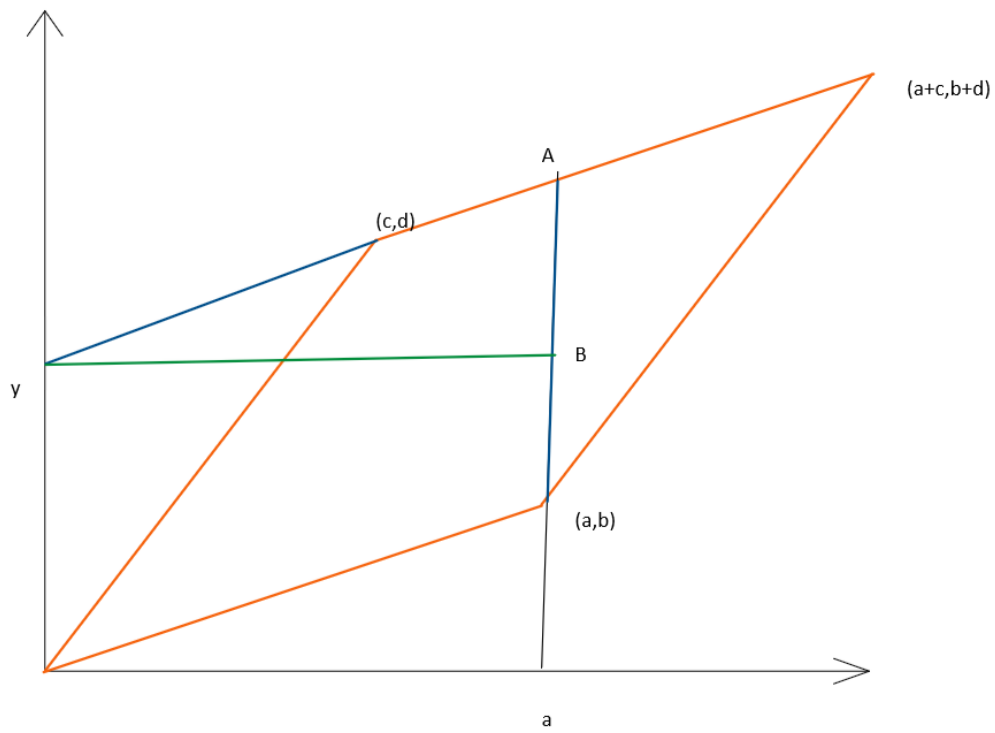
egyenlőtlenségekkel definiálva, ahol $f(x) \leq g(x)$ folytonos függvények. Mutassuk meg az előző feladat megoldását általánosítva, hogy

$$t(N) = \int_a^b (g(x) - f(x)) dx.$$

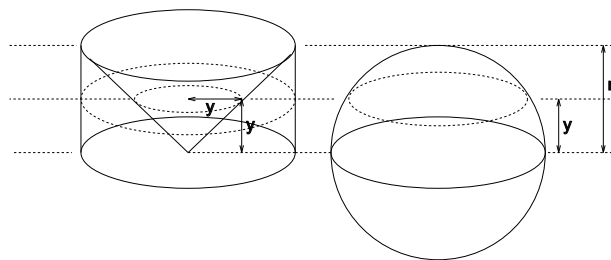
3. Mutassuk meg, hogy a $(0, 0)$, (a, b) , $(a+c, b+d)$, (c, d) csúcsú P paralellogramma területe egyenlő az $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ mátrix determinánsának abszolútértékével. Használhatjuk a következő gondolatmenetet: Az 1. Ábrán a P paralellogramma területe egyenlő a $(0, 0)$, (a, b) , A , $(0, y)$ csúcsú Q paralellogramma területével hiszen azonos az alap és a magasság. Hasonlóan Q területe egyenlő a $(0, 0)$, $(a, 0)$, $B = (a, y)$, $(0, y)$ csúcsú téglalap területével. Tehát csak y (illetve ay) értékét kell kiszámolni.

Mi a determináns előjelének jelentése?

4. Mutassuk meg, hogy az r sugarú félgömb köré írt hengerből egy lefelé fordított kúpot kihagyva egy olyan testet kapunk, amelynek megfelelő síkmetszetei azonos területűek ($\pi(r^2 - y^2)$ a 2. ábra jelölésével), mint a félgömbnek, tehát a gömb térfogata kétharmada a körülírt hengernek.
5. Vágjunk ki egy R sugarú origó középpontú gömbből egy r sugarú, a z -tengellyel megegyező tengelyű körhengert. A maradékot hívjuk szalvétagyűrűnek. Mutassuk meg (pl. a Cavalieri elv segítségével), hogy a szalvétagyűrű térfogata csak az m magasságától függ. Mennyi lesz a térfogat?



1. ábra. paralellogramma területe



2. ábra. Gömb térfogata