Lokálisan véges Borel mértékek regularitása, Lebesgue-Stieltjes mérték

Legyen μ_0 lokálisan véges Borel mérték $\mathbb{R}^p$-n, azaz $\mathbb{R}^p$ Borel halmazain értelmezett mérték, mely minden kompakt (így minden korlátos) halmazon véges. Álljon $\mathcal{A}$ a balról zárt, jobbról nyílt $\mathbb{R}^p$-beli téglákból, azaz legyen

$$\mathcal{A} = \{[a_1, b_1) \times \ldots \times [a_p, b_p)\}.$$

Ekkor $\mathcal{A}$ félgyűrű, $\alpha = \mu_0|_{\mathcal{A}}$ σ-véges, additív relatív külső mérték $\mathcal{A}$-n, így a kiterjesztési tétel szerint az α-hoz asszociált ϕ_α külső mérték a μ_0 Borel mérték kiterjtesztése lesz.

Az így megkapható ϕ_α külső mértékek a *Lebesgue-Stieltjes féle külső mérték*ek, a ϕ_α szerint mérhető halmazokra megszorítva kapjuk a *Lebesgue-Stieltjes féle mérték*eket illetve a *Lebesgue-Stieltjes féle mértékter*eket.

A fenti definíció alapján minden lokálisan véges Borel mérték egy Lebesgue-Stieltjes mérték megszorítása a Borel halmazokra. Bár $\mathbb{R}$-en máshogy definiáltuk a Lebesgue-Stieltjes féle mértéket, de ott is beláttuk ezt a megfeleltetést a lokálisan véges Borel mértékekkel, ezért a két definíció ugyanazt adja. Lehet és szokás $p > 1$ esetén is eloszlásfüggvénnyel vagy additív téglafüggvénnyel definiálni a Lebesgue-Stieltjes féle mértéket.

Az alábbi tétel ezen mértékek regularitási tulajdonságait adja.

Tétel. *Tetszőleges $(\mathbb{R}^p, \mathcal{M}, \mu)$ Lebesgue-Stieltjes féle mértéktérre a következők teljesülnek.*

(0) A mértéktér teljes.

(1) Bármely $E \in \mathcal{M}$ halmazhoz és $\varepsilon > 0$-hoz vannak olyan G nyílt és F zárt halmazok, melyekre $F \subset E \subset G$ és $\mu(G \setminus F) < \varepsilon$.

(2) Tetszőleges $E \in \mathcal{M}$ halmazra

$$\mu(E) = \inf\{\mu(G) : E \subset G \text{ nyílt}\} = \sup\{\mu(K) : K \subset E \text{ kompakt}\}.$$

(3) Bármely $E \in \mathcal{M}$ halmazhoz vannak olyan A F_σ és B G_δ halmazok, melyekre $A \subset E \subset B$ és $\mu(B \setminus A) = 0$.

(4)

$$\mathcal{M} = \{A \cup N : A\ F_\sigma, \mu(N) = 0\} = \{B \setminus N : B\ G_\delta, \mu(N) = 0\} =$$
$$= \{A \cup N : A \text{ Borel}, \mu(N) = 0\} = \{B \setminus N : B \text{ Borel}, \mu(N) = 0\}.$$

Megjegyzés. A (2) tulajdonsággal rendelkező (Boreleket tartalmazó σ-algebrán értelmezett) mértékeket hívjuk *reguláris*nak.

Bizonyítás.

(0) Ez világos a mérhetők jól kettévágós definíciójából.

(1) Először azt látjuk be, hogy van olyan $G \supset E$ nyílt halmaz, amelyre $\mu(G \setminus E) < \varepsilon/2$. Mivel a korlátos halmazok véges mértékűek, ezért felbontható E megszámlálhatóan sok véges mértékű E_n uniójára. Ha minden E_n-hez találunk $G_n \supset E_n$ nyíltat, melyre $\mu(G_n \setminus E_n) < \varepsilon/2^{n+1}$, akkor $G = \cup_n G_n$ jó lesz. Tehát a továbbiakban feltehetjük, hogy $\mu(E) < \infty$.

Mivel definíció szerint μ az $\mathcal{A}$-ra vett megszorításához asszociált külső mérték megszorítása $\mathcal{M}$-re, ezért

$$\mu(E) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mu(T_i) : E \subset \cup_i T_i, T_i \in \mathcal{A} \right\}.$$

Vegyük észre, hogy minden $\mathcal{A}$-beli $T = [a_1, b_1) \times \ldots \times [a_p, b_p)$ tégla előáll egymásba skatulyázott $(a_1 - 1/n, b_1) \times \ldots \times (a_p - 1/n, b_p)$ nyílt téglák metszeteként. Mivel ezek véges μ mértékű halmazok, ezért a μ mértékük tart $\mu(T)$-hez. Emiatt, a fenti képlet és $\mu(E) < \infty$ miatt vannak olyan T_i' nyílt téglák, melyekre $E \subset \cup_i T_i'$ és $\sum_i \mu(T_i') < \mu(E) + \varepsilon$. Ekkor $G = \cup_i T'$ olyan nyílt halmaz, melyre $\mu(G \setminus E) < \varepsilon/2$.

Az eddig belátottak szerint E komplementerét nyílttal fedve, majd annak komplementerét véve kapunk megfelelő F-et.

(2) Az infimumra vonatkozó állítás $\leq$ része világos a monotonitás miatt, $\geq$ pedig (1)-ből következik. A szuprémumra vonatkozó állításból a $\geq$ világos, a $\leq$ kompakt helyett elsőre zártra következik (1)-ből. Viszont R^p-ben minden zárt halmaz kompaktak felszálló uniója, így a mértékek folytonossága miatt a zárt halmazok kompakt halmazokkal belülről tetszőlegesen jól közelíthetőek μ szerint.

(3) Következik (1)-et $\varepsilon = 1/n$-re alkalmazva.

(4) Az, hogy $\mathcal{M}$ része ezeknek a halmazrendszereknek, következik (3)-ből, a másik irány pedig abból, hogy $\mathcal{M}$ tartalmazza a Boreleket és σ-algebra.

Speciális eset. *A fenti (0)-(4) állítások igazak a Lebesgue mértékre ($\mathcal{M} = \mathcal{L}, \mu = \lambda$-ra).*

Következmény. *Tetszőleges lokálisan véges Borel mértékre igazak a fenti (1)-(4) állítások ($\mathcal{M} = \mathcal{B}$-re).*

Megjegyzések.

1. Ebben a következményben a lokális végesség nem hagyható el, ezt mutatja például a számosságmérték.

2. A Tétel (4)-es állítása azt adja, hogy a Lebesgue-Stieltjes féle mértékek épp a lokálisan véges Borel mértékek teljessé tételével adódó mértékek.