Jordan-mérték és integrál kiegészítő feladatsor
Többváltozós analízis 2 gyakorlathoz

1. a) Bizonyítsuk be, hogy $\mathbb{R}^n$-ben véges sok nullmértékű halmaz uniója is nullmértékű!

   b) Igaz-e ugyanez, ha megengedünk végtelen sok halmazt?

2. A most tanult szeletelési elv segítségével bizonyítsuk be a korábban tanult képleteket

   a) kúp, b) tetraéder és c) forgástest

   térfogatára!

3. Cantor-halmaz egyik lehetséges definíciója a következő. Vesszük a $C_0 = [0, 1]$ intervallumot. Elhagyjuk a középső harmadát alkotó nyílt intervallumot, vagyis az $(1/3, 2/3)$ intervallumot, marad a $C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$ halmaz. A maradék két zárt intervallumnak is elhagyjuk a középső nyílt harmadát, marad a $C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1]$ halmaz. Ezt folytatva kapjuk a $C_3, C_4, \ldots$ halmazokat. Az így kapott halmazok

$$C = \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$$

   metszetét hívják Cantor-halmaznak.

   Mennyi a Cantor-halmaz belső mértéke, külső mértéke, mérhető-e és ha igen, mennyi a mértéke?

4. Bizonyítsuk meg, hogy minden tengelypárhuzamos nyílt téglalap is Jordan-mérhető és a Jordan-mértéke két oldal hosszának a szorzata.

5. Nevezzünk általánosított kúpnak egy olyan testet, amelyet úgy kapunk, hogy veszünk a térben egy S síkot, az S síkban egy A mérhető halmazt, az S síktól $h > 0$ távolságra pedig egy P pontot, és A minden pontját összekötjük P-vel, azaz a K általánosított kúp ezen zárt szakaszok uniója.

   a) Gondoljuk meg, hogy az egyenes kúp, ferde kúp, tetraéder, gúla mind ennek spec. esetei!

   b) Fejezzük ki K térfogatát A területének és h-nak a segítségével!

6. a) Írjuk fel az origó középpontú, 1 sugarú $\overline{B}_1$ zárt körlapot normáltartományként, azaz adjunk meg egy $[a, b]$ intervallumot, és azon f és g függvényeket, amelyekre

$$\overline{B}_1 = \{(x, y) : x \in [a, b], f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

   b) Írjuk fel a fentiek alapján a $\overline{B}_1$ körlap területét megadó integrált!

   c) Számítsuk is ki az integrált!

   d) Számítsuk ki a $p = (p_1, p_2)$ középpontú, r sugarú $\overline{B}_r(p)$ zárt körlap területét is!

7. a) Bizonyítsuk be, hogy ha X, Y és Z korlátos nemüres részei a számegyenesnek és bármely $x \in X$, $y \in Y$ esetén $x + y \in Z$, akkor $\sup Z \geq \sup X + \sup Y$.

   b) Bizonyítsuk be, hogy ha A és B egymásba nem nyúló korlátos halmazok a síkon, akkor $t_b(A \cup B) \geq t_b(A) + t_b(B)$.

   (Ha valakinek esetleg nem megy az (a) rész bizonyítása, attól még természetesen a (b) részt megpróbálhatja az (a) rész állításának felhasználásával.)