2. Bevanal 2 kiegészítő feladatsor, (rendezett testek és egyebek)

A következő néhány feladatban T egy tetszőleges rendezett test.

1. Van-e olyan A halmaz, amelyre $\mathbb{Z} \subset A$ és $\mathbb{Z} \in A$ is teljesül?

2. a) Bizonyítsuk be, hogy

$$(\forall a, b, c, d \in T)\ (a < b \wedge c < d) \Longrightarrow a + c < b + d$$

   b) Mit mondhatunk összeg helyett a szorzatról?

3. Bizonyítsuk be, hogy semmilyen T rendezett testben sincsenek szomszédos elemek, azaz bármely T-beli $a < b$ párhoz létezik olyan $c \in T$, amelyre $a < c < b$ teljesül!

4. Legyen $H \subset T$. Mit jelentenek röviden magyarul az alábbi állítások? Van-e közülük olyan, amely biztosan igaz vagy biztosan hamis?

   a) $\forall x \in H \quad \exists y \in H \quad x < y$

   b) $\exists x \in H \quad \forall y \in H \quad x < y$

   c) $\forall x \in H \quad \exists y \in H \quad x \leq y$

   d) $\exists x \in H \quad \forall y \in H \quad x \leq y$

   e) $\forall y \in H \quad \exists x \in H \quad x < y$

5. Bizonyítsuk be, hogy a komplex számok teste nem rendezhető, azaz nem lehet megadni $\mathbb{C}$-n olyan rendezést, amelyre teljesül minden rendezési axióma!

6. Bizonyítsuk be, hogy minden $a \in T$-re

   a) $|a| \geq 0$

   b) $-|a| \leq a \leq |a|$

   c) $-|a| \leq -a \leq |a|$

7. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész n-re és $a_1, \ldots, a_n \in T$-re

$$|a_1 + \ldots + a_n| \leq |a_1| + \ldots + |a_n|.$$

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely $a, b \in T$ esetén

$$|a| - |b| \leq |a - b| \leq |a| + |b|\ !$$

9. Lehet-e egy rendezett testnek legnagyobb eleme?

10. Bizonyítsuk be, hogy bármely T rendezett testben teljesülnek az alábbiak!

   a) $(\forall a \in T)\ (\exists b \in T)\ b > a \cdot a$

   b) $(\exists a \in T)\ (\forall b \in T)\ (b > a \Longrightarrow b > 2a)$

   c) $(\forall a \in T)\ (\exists b \in T)\ (\forall c \in T)\ (c > b \Longrightarrow c \cdot c > a)$

11. a) Egy futó 20 kört fut, a köröket rendre $v_1, \ldots, v_{20}$ sebességgel futja. A teljes távon vett átlagsebessége milyen közepe a $v_1, \ldots, v_{20}$ sebességeknek?

   b) Egy másik futó 20 percig fut, a sebességét percenként változtatja, a k-adik percben v_k sebességgel fut ($k = 1, 2, \ldots, 20$). Az ő teljes távon vett átlagsebessége milyen közepe a $v_1, \ldots, v_{20}$ sebességeknek?

   c) Melyik futónak nagyobb az átlagsebessége?

12. Legyen H tetszőleges halmaz. Mit jelentenek röviden magyarul az alábbi formulák?
   a) $(\exists x)\ (x \in H)$
   b) $(\exists x)(\exists y)\ (x \in H \wedge y \in H \wedge x \neq y)$
   c) $(\forall x)\ (x \in H \Longrightarrow x \in \mathbb{Z})$

13. Mi ez a halmaz?
   a) $\{x \in \mathbb{Z}\ :\ x^2 \leq 5\}$
   b) $\{x \in \mathbb{Z}\ :\ x^2 \leq 5 \wedge (x = 3 \vee x = -4)\}$
   c) $\{x \in \mathbb{Z}\ :\ (\forall y \in \mathbb{Z})\ y > x \Longrightarrow y^2 > 4\}$
   d) $\{x \in \mathbb{Z}\ :\ (\forall y \in \mathbb{Z})\ y < x \Longrightarrow y^2 < 4\}$

14. Bizonyítsuk be a mértani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből!

15. Igaz-e, hogy
   a) $(A \subset B) \wedge (B \in C) \Longrightarrow A \subset C$?
   b) $(A \in B) \wedge (B \subset C) \Longrightarrow A \in C$?
   c) $(A \subset B) \wedge (B \in C) \Longrightarrow A \in C$?
   d) $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Longrightarrow A \subset C$?
   e) $(A \in B) \wedge (B \in C) \Longrightarrow A \in C$?

16. Írjuk fel formulákkal (szöveg nélkül) azt, hogy a H halmaz pontosan 1 elemű!

17. Írjuk fel formulákkal (szöveg nélkül) a prímszámok halmazát!

18. Állapítsuk meg a két állítás logikai kapcsolatát, azaz döntsük el, hogy igaz-e (i)$\Longrightarrow$(ii) illetve (ii)$\Longrightarrow$(i)!

   $(i)\ x \in A \vee x \in B \qquad\qquad (ii)\ x \in A \cap B$

19. Állapítsuk meg a két állítás logikai kapcsolatát, azaz döntsük el, hogy igaz-e (i)$\Longrightarrow$(ii) illetve (ii)$\Longrightarrow$(i) !
   (i) $(A \subset B) \wedge (C \subset D)$
   (ii) $A \setminus D \subset B \setminus C$

20. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív egész n-re

$$\sqrt[n]{3} - 1 \leq \frac{2}{n}\ !$$

21. Van-e olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre
   a) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 100$?
   b) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n$?
   c) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{2} + 2$?
   d) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 10\sqrt[3]{n}$?

22. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges T rendezett testben bármely $a \in T$, $\varepsilon > 0$-ra

$$|x - a| < \varepsilon \Longleftrightarrow a - \varepsilon < x < a + \varepsilon.$$

23. * Huszonöt szuperintelligens gonosz oroszlán közé egy darab oszthatatlan hús kerül. Ha valamelyik megeszi, akkor elalszik, és amíg alszik, a többiek úgy tekintenek rá, mint egy darab oszthatatlan húsra. Az oroszlánok szívesen esznek, de épp nem fenyeget, hogy éhen haljanak, ezért azt semmiképpen sem szeretnék, hogy megegyék őket. A fentieket az oroszlánok is tudják. Mi fog történni?