

4. Bevanal 2 kiegészítő feladatsor, (logika, rendezés, hatványozás, sorozatok)

1. Mely $H \subset \mathbb{R}$ halmazokra teljesül?

a) $(\forall x \in H) (\exists a, b \in \mathbb{R}) x < a \wedge x > b$

b) $(\forall x \in \mathbb{R}) (\exists y \in H) x < y \vee x > y$

c) $(\forall x \in H) (\exists y \in H) x < y \wedge (\forall x \in H) (\exists y \in H) x > y$

2. Legyen

$$H = \{ \{n\sqrt{2}\} : n \in \mathbb{N}^+ \},$$

ahol $\{x\}$ az x szám törtrészét jelöli. Bizonyítsuk be, hogy H -nak van legnagyobb alsó korlátja és legkisebb felső korlátja!

3. Legyen

$$A = \left\{ \frac{1}{n} : n \text{ és } n + 2 \text{ (pozitív) prímek} \right\}.$$

Bizonyítsuk be, hogy az A halmaznak van legnagyobb alsó korlátja!

4. Igaz-e, hogy ha x és y kétféleképpen írható fel végtelen tizedestörtként, akkor $x + y$ is kétféleképpen írható fel végtelen tizedestörtként?

5. Bizonyítsuk be, hogy bármely $a > 1$, $x, y \in \mathbb{Q}$ számokra $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$!

6. a) Adjunk meg a racionális számoknak olyan H részhalmazát, melyre $\sup H = \sqrt{2}$!

b) Bizonyítsuk be, hogy bármely $c \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $H \subset \mathbb{Q}$ halmaz, amelyre $\sup H = c$.

7. Írjuk fel logikai jelekkel (tagadás jel nélkül), hogy

a) az (a_n) sorozat nem tart b -hez!

b) az $a_n = 1/n$ sorozat nem tart 2-höz!

8. Bizonyítsuk be, hogy az $a_n = 1/n$ sorozat

a) tart 0-hoz!

b) nem tart 2-höz!

9. Bizonyítsuk be, hogy racionális x kitevőre is teljesül, hogy tetszőleges $a > 1$ -re:

$$a^x = \sup \{ a^r : r < x, r \in \mathbb{Q} \}.$$

10. a) Peti nézi Annát, Anna nézi Gergőt. Peti házas, Gergő nem házas. Néz házas ember nem házas embert? (Lehetőségek: Igen / Nem / Ennyi információból nem lehet eldönteni.)

b) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}} \right)^{\sqrt{2}} = ?$

c) Bizonyítsuk be, hogy irracionális szám irracionális kitevős hatványa lehet racionális!

11. * Legyen a_n a $\sqrt{2}$ tizedesvessző utáni n -edik számjegye. Adjunk képletet a_n -re!