4. Bevana 2 kiegészítő feladatsor

(monoton sorozatok, az e szám, részsorozatok)

1. Határozzuk meg az alábbi sorozatok határértékekeit!

   a) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ b) $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}$ c) $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}$ d) $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{n}$

   e) $\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n}$ f) $\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}$ g) $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}$ h) $\left(1+\frac{1}{3n}\right)^{2n}$

2. a) $\sup\left\{5-\frac{3}{2\sqrt[3]{n}+17}\ :\ n\in\mathbb{N}^+\right\}=\,?$ b) $\inf\left\{\sqrt[n]{7}\ :\ n\in\mathbb{N}^+\right\}=\,?$

3. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív egész n esetén
$$n!>\left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

4. Legyen
$$a_n=\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots+\sqrt{2}}}$$
   sorozat határértékét, ahol n a kettesek száma a fenti kifejezésben.

   a) Bizonyítsuk be, hogy minden $n\in\mathbb{N}^+$-re $a_{n+1}=\sqrt{2+a_n}$.

   b) Bizonyítsuk be, hogy minden $n\in\mathbb{N}^+$-re $a_n\le 2$.

   c) Bizonyítsuk be, hogy az (a_n) sorozat monoton nő.

   d) Bizonyítsuk be, hogy az (a_n) sorozat konvergens.

   e) Határozzuk meg az (a_n) sorozat határértékét!

5. a) Bizonyítsuk be, hogy végtelenhez tartó $(a_n),(b_n)$ sorozatok esetén az $a_n/b_n\to 0$ és $b_n/a_n\to\infty$ feltételek ekvivalensek!

   b) Bizonyítsuk be, hogy a fenti állítás hamis lenne, ha nem kötnénk ki, hogy az (a_n) és (b_n) sorozatok végtelenhez tartanak!

6. Van-e monoton részsorozata? Van-e konvergens részsorozata?

   a) $(-1)^n$ b) n^2 c) $\cos n$ d) $\{n\cdot\sqrt{2}\}$

7. A Négyszögletes Kerekerdőben terem a legfinomabb szarvasgomba. Az erdőt négyzet alakú hatalmas négyzetráccsal modellezhetjük, melynek minden sorában véletlenszerűen egy-egy szarvasgomba van. Mennyi körülbelül a valószínűsége annak, hogy egy adott oszlopon végigsétálva találunk egy szarvasgombát (feltéve, hogy nagyon jó orrunk van)?