2. Bevanal 2 kiegészítő feladatsor, (inf, sup, hatványozás, tizedestörtek)

1. Mit mondhatunk egy nem üres, korlátos $H \subset \mathbb{R}$ halmaz szuprémumáról, ha csak annyit tudunk a halmazról, hogy

   a) 7 felső korlátja a halmaznak ? b) $7 \in H$?

2. Adjuk meg az alábbi halmazok minimumát, maximumát, infimumát és szuprémumat:

   a) $[5, 8)$ b) $\{1/n\colon n \in \mathbb{N}^+\}$ c) $(3, \infty)$ d) $\mathbb{Q} \cap [\sqrt{3}, 3]$

3. Legyen
$$H = \{\ \{n\sqrt{2}\}\ :\ n \in \mathbb{N}^+\},$$
   ahol $\{x\}$ az x szám törtrészét jelöli. Bizonyítsuk be, hogy H-nak van legnagyobb alsó korlátja és legkisebb felső korlátja!

4. Bizonyítsuk be, hogy bármely két (különböző) valós szám között van racionális szám.

5. Bizonyítsuk be, hogy egy nem üres, felülről korlátos $H \subset \mathbb{R}$ halmaznak akkor és csak akkor van maximuma, ha $\sup H \in H$.

6. Tegyük fel, hogy $A, B \subset \mathbb{R}$ korlátos, nem üres halmazok.

   a) Bizonyítsuk be, hogy ha $A \subset B$, akkor $\sup A \leq \sup B$.

   b) Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be az analóg állítást infimumra.

7. Legyen
$$A = \left\{ \frac{1}{n}\ : n \text{ és } n+2 \text{ (pozitív) prímek} \right\}.$$
   Bizonyítsuk be, hogy az A halmaznak van legnagyobb alsó korlátja!

8. Bizonyítsuk be, hogy bármely $a > 1$, $x, y \in \mathbb{Q}$ számokra $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$!

9. a) Adjunk meg a racionális számoknak olyan H részhalmazát, melyre $\sup H = \sqrt{2}$!

   b) Bizonyítsuk be, hogy bármely $c \in \mathbb{R}$ számhoz van olyan $H \subset \mathbb{Q}$ halmaz, amelyre $\sup H = c$.

10. Bizonyítsuk be, hogy racionális x kitevőre is teljesül, hogy tetszőleges $a > 1$-re:
$$a^x = \sup\{a^r\ :\ r < x, r \in \mathbb{Q}\}.$$

11. a) Peti nézi Annát, Anna nézi Gergőt. Peti házas, Gergő nem házas. Néz házas ember nem házas embert? (Lehetőségek: Igen / Nem / Ennyi információból nem lehet eldönteni.)

    b) $\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = ?$

    c) Bizonyítsuk be, hogy irracionális szám irracionális kitevős hatványa lehet racionális!

12. a) Igaz-e, hogy ha az x és y pozitív valós számok kétféleképpen írhatóak fel végtelen tizedestörtként, akkor $x + y$ is kétféleképpen írható fel végtelen tizedestörtként?

    b) Igaz-e, hogy ha az x és y pozitív valós számok egyféleképpen írhatóak fel végtelen tizedestörtként, akkor $x + y$ is egyféleképpen írható fel végtelen tizedestörtként?

13. * Melyek azok a valós számok, melyeknek bármely k-as számrendszerben egyértelmű a végtelen k-ados tört felírása?

14. * Legyen a_n a $\sqrt{2}$ tizedesvessző utáni n-edik számjegye. Adjunk képletet a_n-re!