

3. Bevanal 2 kiegészítő feladatsor, (még rendezett testek és axiómák)

1. Adott T rendezett testet akkor mondtunk Arkhimédészinek, ha az alábbi axióma teljesül:

$$(\forall x \in T) (\exists n \in \mathbb{N}^+) n > x.$$

Bizonyítsuk be, hogy az alábbiak mind ekvivalensek a fenti Arkhimédészi axiómával, vagyis az alábbiakat is lehet Arkhimédészi axiómának hívni!

- a) $(\forall x \in T) (\exists n \in \mathbb{N}) n > x$
- b) $(\forall x \in T) (\exists n \in \mathbb{Z}) n > x$
- c) $(\forall x \in T) (\exists n \in \mathbb{Z}) n < x$
- d) $(\forall a \in T, a > 0) (\exists n \in \mathbb{N}^+) \frac{1}{n} < a$

2. Legyen T rendezett test, $\emptyset \neq H \subset T$. Állapítsuk meg az alábbi állításpárok logikai kapcsolatát!

- a) (i) $(\exists M \in T) (\forall x \in H) x < M$ (ii) $(\exists M \in T) (\forall x \in H) x \leq M$
- b) (i) $(\exists M \in T) (\forall x \in H) x \leq M$ (ii) $(\exists M \in H) (\forall x \in H) x \leq M$
- c) (i) $(\exists M \in T) (\forall x \in H) x < M$ (ii) $(\forall x \in H) (\exists M \in T) x < M$

3. Egészegyütthatós polinomok az $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ alakú kifejezéseket értjük, ahol $n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}, a_n \neq 0$, valamint a 0-t. Jelölje $\mathbb{Z}[x]$ az egészegyütthatós polinomok halmazát, $\mathbb{Z}(x)$ pedig a (racionális) törtfüggvények halmazát, azaz a p/q alakú kifejezések halmazát, ahol $p, q \in \mathbb{Z}[x], q \neq 0$.

A p/q és r/s törtfüggvényeket akkor tekintünk egyenlőnek, ha átszorzás után azonosságot kapunk, azaz a ps és qr polinomok megegyeznek.

a) Bizonyítsuk be, hogy a szokásos műveletekkel $\mathbb{Z}(x)$ testet alkot!

A rendezést $\mathbb{Z}(x)$ -en a következőképpen definiáljuk. Egy p/q törtfüggvényt akkor mondunk pozitívnak, ha p és q főegyütthatói azonos előjelűek. Akkor mondjuk, hogy $f < g$, ha $g - f$ ezen definíció szerint pozitív.

b) Bizonyítsuk be, hogy ezzel a rendezéssel rendezett testet kapunk!

c) Mely törtfüggvények a természetes számok ebben a rendezett testben?

d) Bizonyítsuk be, hogy az Arkhimédészi axióma nem teljesül ebben a rendezett testben!

*e) Döntsük el, hogy a Cantor axióma teljesül-e!