1. Bevanal 2 kiegészítő feladatsor, (logika, halmazok, teljes indukció, közepek, becslések)

1. Legyen $A_1, A_2, \ldots$ állítások egy végtelen sorozata. Mely állításokról kell tudnunk közülük, hogy igazak, hogy az összes belátásához elég legyen minden pozitív egész n-re az alábbi következtetést bizonyítani?

   a) Ha igaz A_n, akkor igaz A_{n+1}.

   b) Ha igaz A_n és A_{n+1}, akkor igaz A_{n+2} is.

   c) Ha igaz A_n, A_{n+1} és A_{n+2}, akkor igaz A_{n+3} is.

   d) Ha minden n-nél kisebb pozitív egész k-ra igaz A_k, akkor igaz A_n is.

2. Legyen $H \subset \mathbb{R}$, azaz H a számegyenes egy részhalmaza. Mit jelentenek röviden magyarul az alábbi állítások? Van-e közülük olyan, amely biztosan igaz vagy biztosan hamis?

   a) $\forall x \in H \quad \exists y \in H \quad x < y$

   b) $\exists x \in H \quad \forall y \in H \quad x < y$

   c) $\forall x \in H \quad \exists y \in H \quad x \leq y$

   d) $\exists x \in H \quad \forall y \in H \quad x \leq y$

   e) $\forall y \in H \quad \exists x \in H \quad x < y$

3. a) Egy futó 20 kört fut, a köröket rendre $v_1, \ldots, v_{20}$ sebességgel futja. A teljes távon vett átlagsebessége milyen közepe a $v_1, \ldots, v_{20}$ sebességeknek?

   b) Egy másik futó 20 percig fut, a sebességét percenként változtatja, a k-adik percben v_k sebességgel fut ($k = 1, 2, \ldots, 20$). Az ő teljes távon vett átlagsebessége milyen közepe a $v_1, \ldots, v_{20}$ sebességeknek?

   c) Melyik futónak nagyobb az átlagsebessége?

4. Legyen H tetszőleges halmaz. Mit jelentenek röviden magyarul az alábbi formulák?

   a) $(\exists x)\ (x \in H)$

   b) $(\exists x)(\exists y)\ (x \in H \wedge y \in H \wedge x \neq y)$

   c) $(\forall x)\ (x \in H \Longrightarrow x \in \mathbb{Z})$

5. Mi ez a halmaz?

   a) $\{x \in \mathbb{Z}\ :\ x^2 \leq 5\}$

   b) $\{x \in \mathbb{Z}\ :\ x^2 \leq 5 \wedge (x = 3 \vee x = -4)\}$

   c) $\{x \in \mathbb{Z}\ :\ (\forall y \in \mathbb{Z})\ y > x \Longrightarrow y^2 > 4\}$

   d) $\{x \in \mathbb{Z}\ :\ (\forall y \in \mathbb{Z})\ y < x \Longrightarrow y^2 < 4\}$

6. Bizonyítsuk be a mértani és harmonikus közép közötti egyenlőtlenséget a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenségből!

7. Van-e olyan A halmaz, amelyre $\mathbb{Z} \subset A$ és $\mathbb{Z} \in A$ is teljesül?

8. Igaz-e, hogy

   a) $(A \subset B) \wedge (B \in C) \Longrightarrow A \subset C$?

   b) $(A \in B) \wedge (B \subset C) \Longrightarrow A \in C$?

   c) $(A \subset B) \wedge (B \in C) \Longrightarrow A \in C$?

   d) $(A \subset B) \wedge (B \subset C) \Longrightarrow A \subset C$?

   e) $(A \in B) \wedge (B \in C) \Longrightarrow A \in C$?

9. Írjuk fel formulákkal (szöveg nélkül) a prímszámok halmazát!

10. Állapítsuk meg a két állítás logikai kapcsolatát, azaz döntsük el, hogy igaz-e (i)$\Longrightarrow$(ii) illetve (ii)$\Longrightarrow$(i)!

    $(i)\ x \in A \vee x \in B \qquad\qquad (ii)\ x \in A \cap B$

11. Állapítsuk meg a két állítás logikai kapcsolatát, azaz döntsük el, hogy igaz-e (i)$\Longrightarrow$(ii) illetve (ii)$\Longrightarrow$(i) !

    (i) $(A \subset B) \wedge (C \subset D)$

    (ii) $A \setminus D \subset B \setminus C$

12. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges pozitív egész n-re

$$\sqrt[n]{3} - 1 \leq \frac{2}{n}\ !$$

13. Van-e olyan $n \in \mathbb{N}$, amelyre

    a) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 100$?

    b) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > n$?

    c) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \frac{n}{2} + 2$?

    d) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} > 10\sqrt[3]{n}$?

14. * Huszonöt szuperintelligens gonosz oroszlán közé egy darab oszthatatlan hús kerül. Ha valamelyik megeszi, akkor elalszik, és amíg alszik, a többiek úgy tekintenek rá, mint egy darab oszthatatlan húsra. Az oroszlánok szívesen esznek, de épp nem fenyeget, hogy éhen haljanak, ezért azt semmiképpen sem szeretnék, hogy megegyék őket. A fentieket az oroszlánok is mind tudják. Mi fog történni?