

Bevonal 2, Bemelegítő feladatsor logikáról és bizonyítások elkezdéséről

Tekintsük az alábbi állításokat:

(P) Van olyan 7-nél nagyobb k egész szám, amelyre $\sqrt[3]{k+13} + \sqrt{k}$ irracionális.

(Q) Bármely 7-nél nagyobb k egész szám esetén $\sqrt[3]{k+13} + \sqrt{k}$ irracionális.

1. Melyik állítás bizonyítását lehet célszerű így kezdeni? (Lehet az is a válasz, hogy mindkettőt és az is, hogy egyiket sem.)

(a) Legyen $k = 123456789$.

(b) Legyen $k = 4$.

(c) Legyen k tetszőleges 7-nél nagyobb egész szám.

(d) Tegyük fel, hogy $\sqrt[3]{k+13} + \sqrt{k}$ racionális.

(e) Tegyük fel, hogy $\sqrt[3]{k+13} + \sqrt{k}$ irracionális.

(f) Tegyük fel, hogy $\sqrt[3]{k+13} + \sqrt{k}$ racionális és $k > 7$ pozitív egész.

(g) Tegyük fel, hogy $\sqrt[3]{k+13} + \sqrt{k}$ irracionális és $k > 7$ pozitív egész.

(h) Tegyük fel, hogy $\sqrt[3]{k+13} + \sqrt{k}$ racionális és $k \leq 7$ pozitív egész.

(i) Tegyük fel, hogy $\sqrt[3]{k+13} + \sqrt{k}$ irracionális és $k \leq 7$ pozitív egész.

(j) Írjunk számítógép programot!

(k) Teljes indukcióval bizonyítunk. $k = 1$ -re...

(l) Teljes indukcióval bizonyítunk. $k = 7$ -re...

(m) Teljes indukcióval bizonyítunk. $k = 8$ -ra...

(n) Teljes indukcióval bizonyítunk. $k = 9$ -re...

2. (HF) Hogyan kell folytatni a fenti bizonyításokat, melyiknél mit kell kihozni?

3. (HF) Oldjuk meg a fenti feladatokat a (P) és (Q) állítás tagadásaira is!

4. Elképzelhető-e, hogy

(a) (P) is igaz és (Q) is igaz?

(b) Egyik sem igaz?

(c) Csak (P) igaz?

(d) Csak (Q) igaz?

5. Állíthatjuk-e biztosan, hogy

(a) (P)-ből következik (Q)?

(b) (Q)-ből következik (P)?

(c) És ha (P) és (Q) közül valamelyikről tudjuk, hogy igaz vagy hamis?

6. (HF) Melyik jelenti ugyanazt, mint (P) vagy (Q)

(a) Ha k pozitív egész és $k > 7$, akkor $\sqrt[3]{k+13} + \sqrt{k}$ racionális.

(b) Ha k pozitív egész és $k > 7$, akkor $\sqrt[3]{k+13} + \sqrt{k}$ irracionális.

(c) Ha k pozitív egész és $\sqrt[3]{k+13} + \sqrt{k}$ racionális, akkor $k > 7$.

(d) Ha k pozitív egész és $\sqrt[3]{k+13} + \sqrt{k}$ irracionális, akkor $k > 7$.

(e) Ha k pozitív egész és $\sqrt[3]{k+13} + \sqrt{k}$ racionális, akkor $k \leq 7$.

(f) Ha k pozitív egész és $\sqrt[3]{k+13} + \sqrt{k}$ irracionális, akkor $k \leq 7$.

7. * Döntsük el legalább az egyik állításról (P) és (Q) közül, hogy igaz-e!